Доклады Академии наук СССР
1955. Том 105, № 6

МАТЕМАТИКА

В. А. УСПЕНСКИЙ

СИСТЕМЫ ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ И ИХ НУМЕРАЦИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 VIII 1955)

Произвольное отображение α какого-либо множества натуральных чисел E на множество M называется нумерацией множества M; если $\alpha(n)=x$, то n называется номером x. В теории алгоритмов важную роль играют нумерации системы $\mathfrak{A}^{(n)}$ всех перечислимых (т. е. рекурсивно-перечислимых) подмножеств N^n (здесь N^n — совокупность всех «n-ок» натуральных чисел) и системы $\mathfrak{U}^{(n)}$ всех вычислимых (т. е. частично-рекурсивных) функций от n аргументов. В литературе известны следующие нумерации этих систем, которые мы будем называть классическими нумерациями: нумерация $\mathfrak{A}^{(1)}$, принадлежащая Посту [2]; нумерация $\mathfrak{U}^{(n)}$ (при любом n), принадлежащая Клини [3]; нумерация $\mathfrak{A}^{(1)}$, рассмотренная Райсом [4]. Каждая классическая нумерация строится по следующему плану: всякому перечислимому множеству (или вычислимой функции) ставится в соответствие определяющий его (ее) конечный набор правил; этот набор правил записывается в определенном коде; все такие записи нумеруются, и тем самым получается нумерация исходной системы. Эта особенность классических нумераций обусловливает их широкую применимость. В настоящей заметке делается попытка рассмотреть с возможно более общей точки зрения существенные для теории алгоритмов свойства нумераций* систем перечислимых множеств, не прибегая в окончательных формулировках к таким понятиям, как «набор правил, определяющий данное перечислимое множество». (Каждую вычислимую функцию мы отождествляем с перечислимым множеством, являющимся ее графиком, и рассматриваем таким образом $\mathfrak{U}^{(n)}$ как систему всех униформных перечислимых подмножеств N^{n+1}.) Пп. 1—3 носят вводный характер.

1. Сведения из топологии. Точку x топологического пространства [1] T назовем точкой τ-прикосновения множества $P \subseteq T$, если во всякой окрестности точки x найдется такая точка $z \in P$, что всякая окрестность z содержит x. Совокупность всех точек τ-прикосновения P назовем τ-замыканием P. Назовем P τ-замкнутым, если оно совпадает со своим τ-замыканием. Скажем, что P τ-плотно в Q, если Q есть подмножество τ-замыкания P.

Лемма 1. *Пусть X и Y — топологические пространства, причем Y есть T_0-пространство. Пусть $P \subseteq X$ τ-плотно в X. Тогда всякие два непрерывные отображения X в Y, совпадающие на P, совпадают и на всем X.*

2. Системы. На протяжении всей заметки под термином «система» будем понимать произвольную систему перечислимых подмножеств множества N^n при каком-либо n (или, при желании, произвольную систе-

* Идея абстрактного изучения нумераций была высказана А. Н. Колмогоровым в докладе, сделанном 9 II 1954 г. на семинаре по рекурсивной арифметике Механико-математического факультета МГУ.

му перечислимых подмножеств $\mathfrak{H}$ ([5])). Системы будем обозначать прописными готическими буквами. Для системы, все элементы которой конечны, можно различными естественными способами уточнить понятие «перечислимости»; например, можно назвать систему конечных множеств $\mathfrak{K}$ перечислимой, если множество $K \subseteq \mathfrak{H}$, составленное из всех представителей всех элементов $\mathfrak{K}$, перечислимо ([5]). Каждую систему $\mathfrak{M}$ будем без оговорок считать T_0-пространством с топологией, введенной в ([5]), п. 1. Подсистему $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{M}$ назовем эффективно открытой в $\mathfrak{M}$, если существует такая перечислимая система конечных множеств $\mathfrak{K}$, что $\mathfrak{P} = \bigcup \mathfrak{Q}_F \{F \in \mathfrak{K}\}$, где $\mathfrak{Q}_F$ — система всех множеств из $\mathfrak{M}$, содержащих F в качестве подмножества. Назовем $\mathfrak{M}$ ω-сепарабельной, если подсистема $\mathfrak{M}'$ всех конечных множеств из $\mathfrak{M}$ перечислима и τ-плотна в $\mathfrak{M}$, и псевдозамкнутой, если $\mathfrak{M}$ τ-замкнута во всякой объемлющей системе. Наиболее важные системы — $\mathfrak{A}^{(n)}$ и $\mathfrak{U}^{(n)}$ — являются ω-сепарабельными, псевдозамкнутыми и связными (топологически).

3. Занумерованные множества. Множество M, рассматриваемое вместе с его нумерацией α, назовем занумерованным множеством и обозначим $M\alpha$. Подмножество $P \subseteq M$ назовем вполне перечислимым в $M\alpha$, если $\alpha^{-1}(P)$ перечислимо в $\alpha^{-1}(M)$ *, и вполне разрешимым в $M\alpha$, если P и $M \setminus P$ вполне перечислимы в $M\alpha$ (Райс ([4]) ввел эти понятия для рассмотренной им нумерации). Рассматривая нумерации систем, будем говорить о занумерованных, вполне перечислимых и т. д. системах. Вычислимым отображением $X\alpha$ в $Y\beta$ назовем всякое отображение f множества X в Y, для которого существует такая вычислимая функция θ, что для любой точки $x \in X$ имеет место $\theta(\alpha^{-1}(x)) \subseteq \beta^{-1}(f(x))$. Будем говорить, что $X\alpha$ вложено в $Y\beta$, если $X \subseteq Y$ и тождественное отображение $f(x) \equiv x$ множества X в Y вычислимо. Если M — топологическое пространство, то его нумерацию назовем открытой, коль скоро всякое его вполне перечислимое подмножество открыто, и непрерывной, коль скоро всякое открытое множество есть сумма вполне перечислимых.

Лемма 2. *Пусть X и Y — топологические пространства, α — открытая нумерация X и β — непрерывная нумерация Y. Тогда всякое вычислимое отображение $X\alpha$ в $Y\beta$ непрерывно.*

4. Вычислимые и потенциально вычислимые нумерации. Пусть $\mathfrak{M}\alpha$ — занумерованная система. Множество всех пар n, t, где n принадлежит области определения α, а $t \in \alpha(n)$, называется универсальным множеством, соответствующим нумерации α. Нумерацию α назовем вычислимой, если соответствующее универсальное множество и множество $\alpha^{-1}(\mathfrak{M})$ всех номеров суть перечислимые множества. Хорошо известно, что все классические нумерации вычислимы. Однако не всякая система обладает вычислимой нумерацией. Известно, что ею не обладает система всех общерекурсивных функций от n аргументов. Можно доказать, что ею не обладает система всех бесконечных перечислимых подмножеств N^n. Нумерацию α системы $\mathfrak{M}$ назовем потенциально вычислимой, если существует такая система $\mathfrak{Q}$ и такая ее вычислимая нумерация β, что $\mathfrak{M}\alpha$ вложена в $\mathfrak{Q}\beta$. Для каждой потенциально вычислимой нумерации имеется общий метод (алгоритм), позволяющий по всякому номеру всякого перечислимого множества из рассматриваемой системы построить набор правил, определяющий это множество.

Теорема 1. *Всякая система обладает потенциально вычислимой нумерацией.*

Теорема 2. *Если α — потенциально вычислимая нумерация системы $\mathfrak{M}$, то всякая система $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{M}$, эффективно открытая в $\mathfrak{M}$, вполне перечислима в $\mathfrak{M}\alpha$.*

---

* Мы говорим, что $R \subseteq E$ перечислимо в E, если $R = E \cap S$, где S — перечислимое множество.

(Райс ([4]) доказал эту теорему для рассмотренной им нумерации системы $\mathfrak{A}^{(1)}$.)

Следствие. *Всякая потенциально вычислимая нумерация непрерывна.*

5. Накрывающие и вполне накрывающие нумерации. Для каждой из классических нумераций имеется общий метод (алгоритм), позволяющий по каждому набору правил, определяющему какое-либо множество из рассматриваемой системы, найти номер этого множества в данной нумерации. Это интуитивное свойство отражается, как мы надеемся, формальным определением вполне накрывающей нумерации. Нумерацию γ системы $\mathfrak{M}$ назовем накрывающей (вполне накрывающей), если всякая занумерованная система $\mathfrak{P}\varphi$, где $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{M}$, а φ — вычислимая (потенциально вычислимая) нумерация, вложена в $\mathfrak{M}\gamma$. Все классические нумерации — вполне накрывающие. Неизвестно, существует ли накрывающая нумерация, не являющаяся вполне накрывающей (см. теорему 4).

Теорема 3. *Всякая система обладает вполне накрывающей нумерацией.*

Теорема 4. *Если $\mathfrak{M}$ — псевдозамкнутая ω-сепарабельная система, то всякая ее накрывающая нумерация является вполне накрывающей.*

Теорема 5 (обратная к теореме 2). *Если $\mathfrak{M}$ есть ω-сепарабельная система и γ — ее накрывающая нумерация, то всякая система $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{M}$, вполне перечислимая в $\mathfrak{M}\gamma$, эффективно открыта в $\mathfrak{M}$.*

(Райс ([4]) сформулировал это утверждение в качестве гипотезы для того частного случая, когда $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}^{(1)}$ и γ—рассмотренная им нумерация.)

Следствие. *Всякая накрывающая нумерация ω-сепарабельной системы открыта.*

Следствие из следствия. *Если ω-сепарабельная система $\mathfrak{M}$ связна и γ — ее накрывающая нумерация, то в $\mathfrak{M}\gamma$ нет нетривиальной (т. е. отличной от пустой и от $\mathfrak{M}$) вполне разрешимой подсистемы.*

Это следствие из следствия содержит в качестве частного случая результаты Райса ([4]) об отсутствии в рассмотренной им нумерации системы $\mathfrak{A}^{(1)}$ нетривиальных вполне рекурсивных классов как при сильном, так и при слабом определении.

6. Связь с вычислимыми операциями ([4]).

Теорема 6 (7). *Пусть $\mathfrak{X}\alpha$ и $\mathfrak{Y}\beta$ — занумерованные системы, причем α — вычислимая (потенциально вычислимая), а β — накрывающая (вполне накрывающая) нумерации. Тогда всякая одноместная вычислимая операция, отображающая $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$, совпадает на $\mathfrak{X}$ с некоторым вычислимым отображением $\mathfrak{X}\alpha$ в $\mathfrak{Y}\beta$.*

Теорема 8 (9) (обратная к теореме 6 (7)). *Пусть $\mathfrak{Y}\beta$ — занумерованная система. Если для всякой занумерованной системы $\mathfrak{X}\alpha$ с вычислимой (потенциально вычислимой) нумерацией и всякой одноместной вычислимой операции, отображающей $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$, существует совпадающее на $\mathfrak{X}$ с этой операцией вычислимое отображение $\mathfrak{X}\alpha$ в $\mathfrak{Y}\beta$, то β — накрывающая (вполне накрывающая) нумерация.*

Теорема 10. *Пусть $\mathfrak{X}\alpha$ есть ω-сепарабельная система с накрывающей, а $\mathfrak{Y}\beta$ — система с потенциально вычислимой нумерацией. Тогда для всякого вычислимого отображения $\mathfrak{X}\alpha$ в $\mathfrak{Y}\beta$ существует одноместная вычислимая операция, совпадающая на $\mathfrak{X}$ с этим отображением.*

Теорема 6 играет решающую роль в доказательстве теоремы 5. Теорема 10 доказывается при помощи обеих лемм, следствий теорем 2 и 5, а также теоремы 2 из ([5]). Пусть $X_1\alpha_1, \ldots, X_l\alpha_l$, $Y\beta$ — занумерованные множества. Отображение f прямого произведения $X_1 \times \ldots \times X_l$ в Y, для которого существует такая вычислимая l-местная функция θ, что

коль скоро $f(x_1, \ldots, x_l) = y$ и $\alpha_l(n_l) = x_l$ $(i = 1, \ldots, l)$, то назовем $\beta(\theta(n_1, \ldots, n_l)) = y$ вычислимым отображением прямого произведения $\Pi X_i \alpha_i$ в $Y\beta$. Если определить само понятие прямого произведения занумерованных множеств и обобщить на него предыдущие понятия и результаты, то можно доказать следующие теоремы:

Теорема 6* (7*). *Пусть $\mathfrak{X}_i\alpha_i$ $(i = 1, \ldots, l)$, $\mathfrak{Y}\beta$ — занумерованные системы, причем α_i — вычислимые (потенциально вычислимые), а β — накрывающая (вполне накрывающая) нумерация. Тогда всякая l-местная вычислимая операция, отображающая $\mathfrak{X}_1 \times \ldots \times \mathfrak{X}_l$ в $\mathfrak{Y}$, совпадает на $\mathfrak{X}_1 \times \ldots \times \mathfrak{X}_l$ с некоторым вычислимым отображением $\Pi\mathfrak{X}_i\alpha_i$ в $\mathfrak{Y}\beta$.*

Теорема 10*. *Пусть $\mathfrak{X}_i\alpha_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ суть ω-сепарабельные системы с накрывающими нумерациями, а $\mathfrak{Y}\beta$ — система с потенциально вычислимой нумерацией. Тогда для всякого вычислимого отображения $\Pi\mathfrak{X}_i\alpha_i$ в $\mathfrak{Y}\beta$ существует l-местная вычислимая операция, совпадающая на $\mathfrak{X}_1 \times \ldots \times \mathfrak{X}_l$ с этим отображением.*

7. Главные нумерации. Нумерацию, являющуюся одновременно вычислимой и накрывающей, назовем главной нумерацией 1-го рода, а являющуюся одновременно потенциально вычислимой и вполне накрывающей — главной нумерацией 2-го рода. Все классические нумерации суть главные нумерации 1-го и 2-го рода одновременно. Значение главных нумераций показывает теорема 11*, вытекающая из теорем 6*, 7*, 10*.

Теорема 11*. *Пусть $\mathfrak{X}_i\alpha_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ и $\mathfrak{Y}\beta$ суть ω-сепарабельные системы с главными нумерациями (одного и того же рода). Тогда класс вычислимых операций, отображающих $\mathfrak{X}_1 \times \ldots \times \mathfrak{X}_l$ в $\mathfrak{Y}$, совпадает на $\mathfrak{X}_1 \times \ldots \times \mathfrak{X}_l$ с классом вычислимых отображений $\Pi\mathfrak{X}_i\alpha_i$ в $\mathfrak{Y}\beta$.*

Теорема 12. *Всякая система обладает главной нумерацией 2-го рода.*

Что касается существования главных нумераций 1-го рода, то удалось установить лишь следующие теоремы:

Теорема 13. *Всякая ω-сепарабельная псевдозамкнутая система обладает главной нумерацией 1-го рода.*

Теорема 14. *Каждая связная ω-сепарабельная система, обладающая вычислимой нумерацией, обладает и вычислимой нумерацией, не являющейся накрывающей (и тем самым не являющейся главной).*

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 VIII 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, 1948. [2] E. L. Post, Bull. Am. Math. Soc., 50, 284 (1944). [3] S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, 1952. [4] H. G. Rice, Trans Am. Math. Soc., 74, 358 (1953). [5] В. А. Успенский, ДАН, 103, № 5 (1955).